$$= \text{Log}\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4}}\right)$$

$$= \text{Log}\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \text{Log}\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \text{Log}e^x = x = f(f^{-1}(x)).$$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) = g(x).$

2/a- $g(x) = x \Leftrightarrow f(g(x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

Soit $\Psi(x) = f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \Psi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{2 - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \times \frac{2 + \sqrt{4x^2+1}}{2 + \sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2+1}\left(2 + \sqrt{4x^2+1}\right)}$$

D'où le tableau de variation Ψ

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$\Psi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\Psi(x)$	0	↗	$\underbrace{\Psi(\sqrt{3}/2)}_{>0}$	↘	$-\infty$

$* \forall x \in]0; \frac{\sqrt{3}}{2}[$ on a $\Psi(x) > 0$

$\Rightarrow$ l'équation $\Psi(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0; \frac{\sqrt{3}}{2}[$.

$* *$ Ψ est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$

$\Rightarrow$ Ψ réalise une bijection de $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$ sur $]-\infty; \Psi(\frac{\sqrt{3}}{2})] \ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $\Psi(x)=0$ possède une seule solution α dans $[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$

Bilan : l'équation $\Psi(x)=0$ possède une seule solution α dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b- $\mathscr{A} = \int_0^\alpha (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^\alpha f(x)\,dx - \int_0^\alpha g(x)\,dx$